Περιοχή του ξ ορίζεται ως εξής:

$$N_\delta(\xi)=\{x\in\mathbb{R}: |x-\xi|<\delta\}=(\xi-\delta,\xi+\delta)$$

Δακτυλική περιοχή του ξ ορίζεται ως εξής:

$$N^*_\delta(\xi)=\{x\in\mathbb{R}: 0<|x-\xi|<\delta\}=N_\delta(\xi)\setminus\{\xi\}$$

Γενικευμένη ευθεία πραγματικών αριθμών:

$$\tilde{\mathbb{R}}=\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

Δεξιά περιοχή του ξ:

$$N_{\delta+}(\xi)=[\xi,\xi+\delta)=\{x\in\mathbb{R}: \xi\leq x<\xi+\delta\}$$

Αριστερή περιοχή του ξ:

$$N_{\delta-}(\xi)=(\xi-\delta,\xi]=\{x\in\mathbb{R}: \xi-\delta<x\leq\xi\}$$

Ενώ,

Δεξιά δακτυλική περιοχή του ξ:

$$N^*_{\delta+}(\xi)=(\xi,\xi+\delta)$$

Αριστερή δακτυλική περιοχή του ξ:

$$N^*_{\delta-}(\xi)=(\xi-\delta,\xi)$$

Καθε υποσύνολο του $\tilde{\mathbb{R}}$ συμβολίζεται με $N(+\infty)$ ή $N(-\infty)$ όπου ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} N(+\infty)&=\{x\in\tilde{\mathbb{R}}: x>a\}\\ N(-\infty)&=\{x\in\tilde{\mathbb{R}}: x<a\}\end{aligned}\right\}\text{ με } a\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Προφανώς} && N(+\infty)=\{+\infty\}\cup(a,+\infty)\\ &\text{και} && N(-\infty)=\{-\infty\}\cup(-\infty,a)\\ &\text{Ενώ} && N^*(+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}=(a,+\infty)\\ &\text{και} && N^*(-\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x<a\}=(-\infty,a)\end{aligned}\right\}\ a\in\mathbb{R}$$

Το ξ θα λέγεται σσ του $\Delta(f)$ αν $\exists x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με στοιχεία στο $\Delta(f) \setminus \{\xi\}$ ώστε $\lim x_\nu = \xi$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για ξ σσ του $\Delta(f)$. Αν για κάθε $x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ με $x_\nu \in \Delta(f) \setminus \{\xi\}$ και $\lim x_\nu = \xi$ η αντίστοιχη ακολουθία $f(x_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ των τιμών της f θα συγκλίνει σε μοναδικό όριο

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για ξ σσ του $\Delta(f)$. θα λέμε ότι η f έχει όριο το $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ όταν το x τείνει στο ξ και θα γράφουμε

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \in \tilde{\mathbb{R}} \iff (\forall x_\nu, \nu \in \mathbb{N})(x_\nu \in \Delta(f) \setminus \{\xi\})(x_\nu \to \xi)$$

$$\text{τότε } (f(x_\nu) \to \ell)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αν το ξ μεμονωμένο σημείο του $\Delta(f)$, τότε δεν έχει νόημα να πούμε $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

SOS Ικανή συνθήκη για $\nexists \lim_{x\to\xi} f(x)$:

ή μέσω πλευρικών ορίων στο ξ^+ και στο ξ^- όπου αν είναι διαφορετικά $\nexists \lim_{x\to\xi} f(x)$

Αν για δυο ακολουθίες $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$, $y_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ $\in \Delta(f)\setminus\{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ και $y_\nu \to \xi$ είναι ότι

$$\lim f(x_\nu) \neq \lim f(y_\nu) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to\xi} f(x)$$

Π.χ.1

Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in[-1,1]\cap \mathbb{I} \\ 0, & x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}\end{cases}$

Το $\xi=0$ σσ του $[-1,1]$

Έστω $x_\nu\in[-1,1]\setminus\{0\} \rightsquigarrow \lim x_\nu = 0 \Rightarrow \lim f(x_\nu)=0$ $\left(f(x_\nu)=0\right)$

Έστω $y_\nu\in[-1,1]\setminus\{0\} \to \lim y_\nu = 0 \Rightarrow \lim f(y_\nu)=1$ $\left(f(y_\nu)=1\right)$

Αυτό σημαίνει ότι δεν θα υπάρχει το όριο.

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπαρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$

ΛΥΣΗ

Θα θεωρήσουμε 2 ακολουθίες $x_\nu, y_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ βάση της παρακάτω διαδικασίας:

- $\eta\mu\frac{1}{x_\nu}=0 \Rightarrow \frac{1}{x_\nu}=\nu\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x_\nu=\frac{1}{\nu\pi},\ k\in\mathbb{Z}$
- $\eta\mu\frac{1}{y_\nu}=1 \Rightarrow \frac{1}{y_\nu}=\nu\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow y_\nu=\frac{1}{\nu\pi+\frac{\pi}{2}},\ k\in\mathbb{Z}$

Όπου $\lim x_\nu=\lim y_\nu=0$

αλλά $\lim f(x_\nu)=\lim \eta\mu\frac{1}{x_\nu}=\lim \eta\mu(\nu\pi)=0$

$\lim f(y_\nu)=\lim \eta\mu\frac{1}{y_\nu}=\lim \eta\mu(\nu\pi+\frac{\pi}{2})=1$

Άρα, $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$. (Θα πρέπει το 0 σσ του $\Delta(f)$)

Ενώ στη συνάρτηση $f(x)=x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}$

θα $\exists \lim_{x\to 0} x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}=0$, διότι πρόκειται

για φραγμένη επί μηδενική συνάρτηση